Le “proposte” degli insegnanti di scuola primaria concernenti l’infinito matematico

Silvia Sbaragli
N.R.D. Bologna – A.S.P. Locarno

Pubblicato in: Sbaragli S. (2007). Le “proposte” degli insegnanti di scuola primaria concernenti l’infinito matematico. In: Giacardi L., Mosca M., Robutti O. (2007). *Conferenze e seminari 2006-2007.* 73-87.

Sunto. In questo lavoro si è indagato se gli insegnanti di scuola primaria propongono situazioni, attività, o esplicitano affermazioni riguardanti l’infinito matematico, per poi valutare di che tipo sono tali eventuali proposte. È così emerso che vengono effettuate attività da parte degli insegnanti di scuola primaria su questo argomento e che queste proposte si fondono in modo coerente con le misconcezioni da essi possedute e messe in evidenza in precedenti lavori (Sbaragli 2004, 2006). Tale erronea trasposizione didattica, derivante dalla mancanza di sapere su questo argomento, può di conseguenza favorire la creazione di misconcezioni nella mente degli allievi.

Abstract. In this work we have investigated if primary school teachers propose situations, activities or make explicit statements regarding mathematical infinity, in order to later assess of what kind are their possible proposals. It comes out that primary school teachers carry out activities relative to this topic and that these proposals coherently merge with their misconceptions, highlighted in previous works (Sbaragli 2004, 2006). Such a wrong didactic transposition, that derives from a lack of knowledge on this topic, can therefore foster the creation of misconceptions in the pupils’ mind.

1. Introduzione e quadro teorico di riferimento

In questo articolo vogliamo rilevare se gli insegnanti di scuola primaria propongono particolari situazioni, attività, o esplicitano affermazioni riguardanti l’infinito matematico, per poi indagare di che tipo sono tali proposte. Questa analisi è legata a precedenti lavori su questo tema che vertono sulle convinzioni, e gli eventuali cambi di convinzioni, degli insegnanti di scuola primaria relativi all'infinito matematico (Sbaragli, 2004, 2006), e che hanno messo in evidenza la presenza di numerose misconcezioni possedute dagli insegnanti. Si vuole quindi indagare se tali misconcezioni vengono trasferite agli allievi tramite affermazioni e attività che possono di conseguenza favorire la creazione di misconcezioni[1] nella mente degli allievi.

Tra la vastissima letteratura su questo argomento abbiamo scelto di riferirci esclusivamente ai lavori di ricerca che hanno maggiormente influenzato la seguente analisi.
La maggior parte delle ricerche su questo tema hanno come soggetti gli studenti e mostrano come, sia dal punto di vista storico che per quanto concerne l'apprendimento del concetto di infinito matematico, l'evoluzione di questo argomento sia molto lenta ed avvenga spesso in modo contradditorio e solo grazie ad un processo di sistemazione e maturazione cognitiva degli apprendimenti che riguarda un numero assai limitato di individui. Da questo punto di vista, facciamo riferimento alle seguenti ricerche, ispirate dal classico dibattito filosofico su infinito in senso attuale e in senso potenziale: quella "aristotelica" di Moreno e Waldegg (1991) basata sugli usi potenziali ed attuali del termine "infinito", a volte considerato come aggettivo e a volte come sostantivo, che mette in evidenza analogie tra le risposte "ingenue" degli studenti ed alcune affermazioni di Bernard Bolzano; quella di Tsamir, Tirosh (1992) che si fonda sulle difficoltà incontrate dagli allievi nell'acquisire l'infinito attuale; Shama, Movshovitz Hadar (1994) che evidenziano il tentativo degli studenti di applicare ad insiemi infiniti procedure proprie di quelli finiti analizzando fenomeni periodici; Bagni (1998, 2001) che paragona l'infinito e l'infinitesimo potenziale e attuale nelle concezioni degli studenti prima e dopo lo studio dell'Analisi. Tutte queste ricerche sono volte a dimostrare la presenza di ostacoli epistemologici tramite le intuizioni degli allievi, che risultano essere analoghe a quelle che si sono riscontrate nella storia della matematica.
Sono inoltre numerose le ricerche che si sono occupate delle incoerenze nel ragionamento degli studenti nel trattare l'infinito matematico facendo attenzione agli aspetti didattici.
Da questo punto di vista ricordiamo le ricerche di Arrigo e D'Amore (1999, 2002) rivolte a studenti al termine del percorso di scuola superiore, che

[1] Diamo a questo termine l'interpretazione costruttiva presentata in D'Amore e Sbaragli (2005): «concezione momentaneamente non corretta, in attesa di sistemazione cognitiva più elaborata e critica».

mettono in evidenza come le misconcezioni possedute dagli allievi non dipendono soltanto da ostacoli epistemologici, ma anche da ostacoli di tipo didattico. In queste due ricerche viene particolarmente messo in evidenza un fenomeno già noto come *dipendenza* dei cardinali transfiniti da fatti relativi a misure (l'insieme di misura maggiore ha più elementi), in base al quale, per esempio, vi sono più punti in un segmento più lungo, rispetto ad uno più corto. Tale misconcezione era già stata rilevata da Fischbein, Tirosh, Hess fin dal 1979, trattata da Tall in un classico articolo del 1980 e poi ripresa in diversi lavori successivi come in Fischbein (1992, 2001). In quest'ultimo articolo (Fischbein, 2001), l'autore mostra una serie di esempi di influenze tacite esercitate dai modelli mentali sull'interpretazione di diversi concetti matematici rientranti nel dominio dell'infinito attuale. Tali modelli taciti provocano interpretazioni erronee, contraddizioni e paradossi non essendo in genere controllati in modo consapevole da chi li possiede. In particolare, vengono trattati gli effetti negativi derivanti da alcuni modelli figurali-pittorici indagati tramite dichiarazioni degli studenti relative a insiemi infiniti costituiti da punti geometrici (l'insieme dei punti di un segmento, un quadrato e un cubo). Questa analisi è messa in relazione ai concetti di funzione e derivata e all'interpretazione spaziale del tempo e del moto nel paradosso di Zenone.
Un altro modello intuitivo scorretto rilevato da Arrigo, D'Amore (1999, 2002) in studenti di scuola superiore è l'idea di segmento concepito come *"collana di perle"*, ossia considerato come un filo-segmento formato da perline-punti a contatto l'una con l'altra. Tale modello è legato a misconcezioni riguardanti il punto matematico considerato come ente avente una qualche dimensione e a idee erronee relative alla topologia della retta. Da questo punto di vista ricordiamo la già citata ricerca di Tall (1980) che analizza le convinzioni degli studenti a proposito del numero dei punti contenuti in una retta e in un segmento; Gimenez (1990) che si basa sulla difficoltà degli allievi di scuola primaria a concepire il concetto di densità; Nuñez (1991) che studia l'infinità dei punti di segmenti, di rette, di figure varie, oltre all'infinitamente piccolo; le già citate ricerche di Fischbein (1992, 2001); Gagatsis, Panaoura (2000) che rilevano come la distinzione tra densità e continuità non è certo favorita dall'acritico uso del supporto retta, che inizia fin dalla scuola primaria per N, con vari problemi didattici, e prosegue poi nei livelli scolastici successivi; Sbaragli (2005) che mette in evidenza come negli insegnanti di scuola primaria e secondaria di primo grado, siano presenti le stesse misconcezioni possedute dagli allievi, non solo per il segmento considerato come una "collana di perle" ma anche per gli enti primitivi della geometria.

Il fenomeno di *dipendenza* non riguarda solo l'àmbito geometrico, ma anche quello aritmetico; si parla infatti di *dipendenza* della cardinalità dalla "grandezza" di insiemi numerici; ad esempio, dato che l'insieme dei numeri pari rappresenta un sottoinsieme dell'insieme dei numeri naturali, si pensa che il primo debba essere costituito da un numero minore di elementi. Questo fenomeno di *dipendenza* della cardinalità dalla "grandezza" di insiemi numerici dunque si basa sulla generalizzazione ai casi infiniti di ciò che si è appreso circa la corrispondenza biunivoca sui casi finiti.
Tra le ricerche che si sono occupate delle erronee intuizioni e rappresentazioni che si fanno gli studenti nel tentare di mettere in corrispondenza biunivoca insiemi infiniti, ricordiamo il classico contributo di Waldegg (1993), quella di Tsamir, Tirosh (1997) che centra l'attenzione sul ruolo delle abilità metacognitive nelle azioni degli studenti e sulla coerenza. In particolare, quest'ultimo lavoro verte su un "gioco degli insiemi infiniti", basato su attività che possono portare a intuizioni in reciproco conflitto tra loro, pensato allo scopo di evocare negli studenti la consapevolezza delle incoerenze nelle proprie concezioni riguardanti l'infinito; quelle di Tsamir (1999) e Tsamir, Tirosh (1999) che mostrano come si possano sfruttare le risposte scorrette degli studenti relative a rappresentazioni di insiemi infiniti allo scopo di aumentare la consapevolezza delle contraddizioni presenti nel loro modo di ragionare, guidandoli verso l'uso della corrispondenza biunivoca come unico criterio per paragonare quantità infinite. In questi studi si è messo in evidenza, come la decisione di uno studente relativa alla possibilità che due insiemi infiniti siano costituiti dallo stesso numero di elementi, dipende dalla rappresentazione specifica degli insiemi infiniti data nella situazione problematica. Sulla stessa linea è lo studio di Garbin (2005) che mostra come incidono, non sempre positivamente, i contesti, le rappresentazioni e i diversi linguaggi della matematica sulla percezione dell'infinito e sui conseguenti ragionamenti associati a questo tema, da parte di alunni dai 16 ai 20 anni. In particolare, vengono mostrate le incoerenze degli allievi che evocano immagini contraddittorie della stessa situazione rappresentata in registri semiotici diversi, facendo convivere contemporaneamente immagini formali (infinito "formalizzato") con immagini informali (infinito "percettivo") della stessa situazione cognitiva nel passaggio da infinito potenziale a infinito attuale.
Ricordiamo inoltre l'importante numero speciale della rivista Educational Studies in Mathematics (2001) a cura di Tall e Tirosh dedicato al tema dell'infinito dove vengono riportati otto interessanti contributi dal punto di vista della didattica della matematica che forniscono un ampio panorama

delle ricerche in questo campo e interessanti spunti storici. Gli autori di questi contributi sono: Tall e Tirosh, Kleiner, Jahnke, Monaghan, Mamona-Downs, Tsamir, Fischbein.
Per la nostra trattazione risulta inoltre fondamentale lo studio di Tsamir (2000) che rileva come le difficoltà a trattare l'infinito non siano presenti solo tra studenti, ma anche tra insegnanti in formazione, il che rafforza la necessità di prendere in futuro sempre più in esame gli ostacoli didattici e questo contenuto disciplinare specifico nella formazione, tenendo conto del ruolo centrale dell'intuizione e dell'importanza degli aspetti storici come chiave di lettura degli argomenti matematici.
Nella stessa ottica, in Sbaragli (2004, 2006) sono state messe in evidenza le misconcezioni possedute dagli insegnanti di scuola primaria nei confronti dell'infinito matematico, mostrando come le grandi difficoltà rilevate negli studenti in numerose ricerche, per quanto riguarda l'infinito matematico, non sono dovute solamente agli ostacoli epistemologici, ma anche agli ostacoli didattici creati dalle convinzioni degli insegnanti.

2. Domande di ricerca

Descriviamo in modo esplicito le domande che ci hanno spinto alla presente ricerca.

D1. Gli insegnanti di scuola primaria propongono situazioni, attività o esplicitano affermazioni riguardanti l'infinito matematico fin dai primi anni di scuola primaria?

D2. Nel caso in cui la risposta alla domanda D1 sia affermativa, le proposte degli insegnanti risultano essere corrette dal punto di vista della matematica? Tale proposte possono essere fonte di misconcezioni per gli allievi?

D3. Nel caso in cui le risposte alle domande D1 e D2 rivelassero la proposta da parte degli insegnanti di scuola primaria di situazioni erronee in matematica, gli insegnanti si dimostrano consapevoli che tali situazioni necessiteranno di una futura sistemazione cognitiva o, a causa delle loro personali convinzioni, sono convinti che si tratta di modelli corretti che dovranno accompagnare gli studenti per tutta la loro vita scolastica futura?

3. Ipotesi di ricerca

Riportiamo le nostre ipotesi relative a ciascuna domanda di ricerca:

I.1. A nostro avviso, gli insegnanti di scuola primaria propongono attività, situazioni o fanno affermazioni sull'infinito matematico fin dai primi anni, favorendo così la creazione di modelli intuitivi nella mente degli allievi. Tali proposte riguardano a nostro parere sia l'àmbito geometrico (numeri di punti che formano un segmento, una semiretta o una retta, …), sia quello aritmetico (cardinalità degli insiemi numerici: pari, dispari, multipli di un determinato numero, naturali, interi, …), oltre che l'idea di infinito in sé, considerato come oggetto (sostantivo) e come proprietà (aggettivo).

I.2. A nostro parere, le situazioni, attività e affermazioni relative all'infinito matematico proposte dagli insegnanti di scuola primaria possono risultare erronee in matematica, dato che presumibilmente rispecchieranno il sapere posseduto dagli insegnanti stessi. Ipotizziamo che tali attività si basino su misconcezioni legate ad esempio al fenomeno di *dipendenza*, all'idea di segmento concepito come "collana di perle", alla convinzione di infinito considerato come sinonimo di illimitato, indeterminato, numero finito grande o esclusivo procedimento senza fine (illimitato e indefinito).

I.3. Riteniamo che gli insegnanti, a causa delle loro personali convinzioni, non siano consapevoli che tali proposte presentate agli allievi, rappresentano in realtà misconcezioni che necessiterebbero di sistemazione cognitiva. Tale ipotesi deriva in parte dai risultati di ricerche precedenti (Tsamir, 2000; Sbaragli, 2004, 2006) che mettono in evidenza misconcezioni possedute dagli insegnanti stessi; queste misconcezioni sono la testimonianza che l'infinito matematico è un argomento sconosciuto agli insegnanti di scuola primaria. Per questa ragione riteniamo che le attività proposte dagli insegnanti siano da loro considerate corrette e durature per tutta la vita scolastica dei propri allievi. Per verificare questa ipotesi, ritenevamo molto interessante esaminare attentamente le affermazioni e le modalità delle espressioni degli insegnanti a questo proposito.

4. Metodologia della ricerca

La ricerca ha coinvolto 20 insegnanti italiani di scuola primaria ai quali è stata effettuata una intervista individuale basata sulle attività didattiche concernenti l'infinito matematico proposte in classe. Inizialmente venivano poste dalla ricercatrice le seguenti due domande sulla pratica didattica:

1) Durante l'insegnamento nei cinque anni di scuola primaria ti è mai capitato di parlare di infinito? Quando? In che senso? In che modo? Sfruttando quali materiali?

2) Ti è mai capitato durante l'insegnamento nella scuola primaria di confrontare il numero degli elementi dell'insieme dei numeri naturali con quello dei numeri pari? Il numero degli elementi dell'insieme dei numeri naturali con quello dei numeri interi (relativi)? In che modo? E in quale circostanza?

successivamente, partendo da queste sollecitazioni iniziali, si continuava la discussione tra la ricercatrice e l'intervistato.
La metodologia seguita si basa quindi sul confronto e la discussione attiva, facendo uso del registratore e lasciando alla ricercatrice solo il compito di indirizzare la discussione, intervenendo solo in determinati punti della conversazione per sollecitare alcuni aspetti rilevanti della tematica, ma senza modificare il punto di vista dell'intervistato. In questo modo si è permesso ad ogni insegnante di esprimere interessanti considerazioni sulle situazioni proposte in classe su questo tema.
Per l'intervista non si erano dati limiti di tempo e si era ampiamente chiarito che si trattava di un lavoro nel quale non sarebbero apparsi i nomi degli insegnanti.

5. Descrizione dei risultati delle due domande e degli scambi di opinioni

Riportiamo di seguito i principali risultati che si sono ottenuti in risposta alle nostre domande di ricerca.
Inizialmente presentiamo quelli relativi alle domande 1) e 2) sulle quali verteva la parte iniziale dell'intervista; successivamente riportiamo alcuni aspetti rilevanti per questa trattazione che si sono ottenuti tramite lo scambio di opinione scaturito dalla conversazione tra l'insegnante e la ricercatrice.
In questa sede non daremo la documentazione completa di questi confronti ma ci serviremo solamente delle frasi più significative e ricorrenti enunciate dagli insegnanti. Le complete registrazioni sono comunque a disposizione (presso l'autrice) di chiunque voglia approfondire questa tematica di ricerca. [Con *Ric.* si sono indicati gli interventi effettuati dalla ricercatrice durante la discussione, per sollecitare la conversazione e per indagare più in profondità sulle convinzioni degli insegnanti].

5.1 Risultati ottenuti dalle domande 1) e 2)

1) Tutti gli insegnanti intervistati rispondono alla prima domanda, sostenendo che parlano di infinito in diverse forme fin dai primi anni di

scuola primaria. Esistono quindi attività proposte dagli insegnanti di scuola primaria in classe nelle quali viene trattato questo argomento.
I 20 insegnanti hanno infatti affermato che nella scuola primaria citano e affrontano il concetto di infinito in modo esplicito:
- 5 insegnanti su 20 dichiarano di parlare di infinito esclusivamente in àmbito geometrico, 8 solo in àmbito aritmetico, 7 in entrambi i contesti.

Àmbito geometrico. Gli insegnanti che affermano di usare con i propri allievi l'àmbito geometrico per parlare di infinito, scelgono come oggetto matematico caratterizzante tale concetto, la retta. Tale scelta è spesso legata alla misconcezione chiamata: *infinito come sinonimo di illimitato* (Sbaragli, 2006) che verte sulla convinzione che dire infinito è come dire illimitato mentre finito è come dire limitato. Da questo punto di vista, la retta illimitata è considerata come infinita, mentre il segmento limitato come finito. Questa misconcezione riscontrata tra le convinzioni erronee possedute dagli insegnanti (Sbaragli, 2006) viene quindi trasferita durante l'azione didattica in aula agli allievi fin dalla scuola primaria. Si nota quindi coerenza tra le convinzioni possedute dagli insegnanti e ciò che viene proposto in aula.
Da questo punto di vista riportiamo due affermazioni di insegnanti:
A.: «Dico in terza primaria che la retta è infinita evocando immagini mentali che diano l'idea di infinito come il raggio laser».
F.: «Parlo di infinito quando introduco la retta che non finisce mai».
Questa misconcezione di *infinito come sinonimo di illimitato* viene trasferita in modo ancora più esplicito da parte di quegli insegnanti che evidenziano con gli allievi la differenza tra infinito e finito, confrontando come esempi di tale distinzione la retta e il segmento:
S.: «Dico che la retta è infinita e il segmento è finito».
A.: «Parlando di infinito faccio vedere la differenza fra segmento, semiretta e retta. Il segmento è finito, la semiretta è finita da una parte e infinita dall'altra, la retta è sempre infinita».
2 insegnanti dei 20 intervistati parlano anche di piano in analogia alla retta, e di poligono in analogia al segmento: *C.: «Parlo della retta infinita e del segmento finito, oppure parlo del piano infinito e lo confronto con una figura che è finita»* (per figura intendono un poligono). La parola infinito viene ancora una volta interpretata nel senso di illimitato mentre la parola finito nel senso di limitato; tale scelta può avere come conseguenza il non riuscire a concepire il termine infinito per un poligono quando si parla della cardinalità dei suoi punti.

Àmbito aritmetico. Gli insegnanti che citano l'àmbito aritmetico dichiarano di parlare esplicitamente con gli allievi "dei numeri" intendendo gli insiemi numerici infiniti ed esplicitano scelte che rientrano nella trasposizione didattica come la costruzione della linea dei numeri:

G.: «Ne parlo (di infinito), *quando facciamo i numeri. Dico sempre che sono infiniti».*

A.: «Riferito al numero, faccio vedere la linea dei numeri e dico che non finiscono mai».

- *Infinito potenziale e attuale.* Alcune delle affermazioni degli insegnanti, come quella di G. sopra riportata, sembrano rientrare in una visione attuale dell'infinito ma, come abbiamo dimostrato in Sbaragli (2006), gli insegnanti di questo livello scolastico possiedono esclusivamente una visione potenziale; in effetti, anche se spesso esplicitano affermazioni rientranti in una visione attuale, quando poi si indaga in profondità si nota un'esclusiva interpretazione di infinito di tipo potenziale e una mancanza di consapevolezza su ciò che si era affermato. L'insegnante G. sopra citata, in effetti continua la discussione con la ricercatrice nel seguente modo:

Ric.: «Che cos'è per te l'infinito?».

G.: «Qualcosa che non si raggiunge mai».

Ric.: «Parli di questo in classe?».

G.: «Sì, dico che i numeri sono tantissimi. Puoi sempre continuare a contare senza fine».

La visione potenziale dell'infinito viene quindi trasferita dagli insegnanti intervistati durante l'azione didattica in classe, non in modo consapevole, ritenendola la sola proponibile per allievi di questo livello scolastico, ma come l'unica interpretazione possibile per questo tema.

Ancora più profonda risulta la conversazione avvenuta tra l'insegnante B. e la ricercatrice, che mette in evidenza un'esclusiva visione potenziale dell'infinito:

B.: «Parlo dei numeri che non finiscono mai e dico che l'infinito non lo puoi mai raggiungere».

Ric.: «In che senso non lo puoi mai raggiungere? Se consideri tutti i numeri naturali…».

B.: «I numeri naturali non li puoi mica contare tutti».

Ric.: «Ma è necessario contarli tutti? Non potresti considerarli tutti insieme?».

B.: «No, secondo me li devi poter contare, altrimenti che senso ha?».

Ric.: «Quindi secondo te l'insieme dei numeri naturali non lo puoi considerare tutto in un colpo solo».

B.: «No, come è possibile?».

Interessante è inoltre osservare che solo 1 insegnante su 20 cita tra le attività che propone in classe gli infinitesimi considerati in senso potenziale:
M.: «Io lo uso anche per le parti che posso fare da una quantità, posso continuare a dividere sempre una stessa quantità».

- *Infinito come numero "sempre più grande" ma pur sempre finito.* 6 insegnanti sostengono di proporre l'infinito ai propri allievi in modo coerente con ciò che credono essere l'infinito: *numero "sempre più grande" ma pur sempre finito*.

Da questo punto di vista, interessante è la conversazione avvenuta tra l'insegnante e la ricercatrice:
S.: «Io dico ai miei bambini che l'infinito è un numero sempre più grande che non puoi mai raggiungere».
Ric.: «Quindi che cos'è per te l'infinito?».
S.: «Un numero grande».
Ric.: «Quanto grande?».
S.: «Per me è il più grande che esiste».
Ric.: «Quindi per te il numero più grande che esiste si chiama infinito?».
S.: «Sì, per me sì».
Ric.: «Ma quanto è grande questo numero?».
S.: «Non si sa quanto è grande altrimenti non sarebbe infinito».
S. tende quindi a generalizzazione ai casi infiniti ciò che conosce degli insiemi finiti, rimanendo sempre ancorata al mondo sensibile con concezioni personali e intuitive distanti dall'àmbito della matematica e incoerenti tra loro.

- *Infinito come sinonimo di indeterminato.* Tra gli insegnanti intervistati, 13 parlano dei numeri con i propri allievi, proponendo modelli di infinito legati alla propria personale misconcezione di *infinito come sinonimo di indeterminato*:

C.: «Faccio capire ai miei bambini che l'infinito è un qualcosa che non si sa quanto sia».
Ric.: «In che senso?».
C.: «Che non si riesce a quantificare, a misurare».
Ric.: «Secondo te è proprio questo il significato di infinito matematico?».
C.: «Sì, qualcosa di ignoto».
Spesso gli insegnanti rientrano in più categorie, proponendo diverse tipi di misconcezioni ai propri allievi. In effetti, 3 dei 6 insegnanti che rientrano nella categoria precedente di infinito come numero finito grande, collegano a questo concetto anche la convinzione di infinito come indeterminato [si

rilegga da questo punto di vista l’ultima affermazione di S. nella categoria precedente].

Dalle affermazioni degli insegnanti emerge come le proposte sull’infinito matematico presentate ai propri allievi si basano inconsapevolmente sulle misconcezioni possedute dagli insegnanti stessi. Come abbiamo già affermato in precedenza, si nota coerenza tra ciò che pensano su questo concetto (Sbaragli, 2006) e ciò che trasferiscono ai propri allievi; in effetti le misconcezioni da essi posseduti e rilevate in precedenti ricerche si rintracciano tra le proposte che vengono fornite esplicitamente agli studenti.
Queste attività didattiche che riguardano l’infinito sono considerate dagli insegnanti stessi come corrette in matematica. Da questo punto di vista riportiamo una sola affermazione di una insegnante a mo’ di esempio: *«Cerco di dire ai miei bambini tutto quello che so di questo argomento. Perché, non è questo l’infinito?».*
Queste misconcezioni individuate negli insegnanti intervistati, e sulle quali si reggono le attività proposte agli allievi, sono rintracciabili anche nella Storia della matematica: come sostiene Marchini (2001), pare che ai tempi di Anassimandro di Mileto (¯610-¯547) fossero ritenuti sinonimi infinito, illimitato e indeterminato ed è soltanto nel XIX secolo che la visione attuale dell’infinito è riuscita ad emergere definitivamente.

2) La seconda domanda era stata proposta per riuscire ad evidenziare se qualche insegnante, durante l’attività didattica in classe, propone esperienze di confronto tra le cardinalità di insiemi infiniti.
- 18 insegnanti su 20 rispondono che non hanno mai proposto in modo esplicito attività specifiche su questo tema, ma 5 di questi insegnanti nella discussione successiva affermano che è possibile che, nel parlare di questi insiemi ai propri allievi, abbiano affermato che vi sono più numeri naturali che numeri pari, dato che mancano tutti i dispari, o più numeri interi che naturali, dato che mancano tutti i negativi, fornendo così inconsapevolmente agli allievi affermazioni basate sulla propria misconcezione di *dipendenza* della cardinalità dalla “grandezza” di insiemi numerici.
Una insegnante a tal proposito afferma:
C.: «Non ho mai fatto attività su queste cose, ma è possibile che, parlando dei pari e dispari, abbia fatto notare che i pari e i dispari insieme fanno tutti i naturali e che quindi i pari sono la metà dei naturali».
La conversazione con la ricercatrice prosegue facendo il confronto tra i numeri interi e i naturali, rivelando ancora una volta la misconcezione di *dipendenza*:

Ric.: «E se dovessi parlare ai tuoi allievi dei numeri interi: … -2, -1, 0, 1, 2, …, confrontati con i numeri naturali, che cosa diresti?».
C.: *«Che i numeri interi hanno in più tutti i negativi».*
Ric.: «Quindi secondo te gli elementi che formano l'insieme degli interi sono di più, di meno o lo stesso numero rispetto agli elementi che formano l'insieme dei naturali?».
C.: «Sono ovviamente di più, ci sono in più tutti i negativi».
E prosegue ancora, mettendo in evidenza misconcezioni possedute dall'insegnante sull'ordinamento degli elementi degli insiemi numerici. Queste misconcezioni si basano nel ritenere possibile disporre i numeri esclusivamente secondo il cosiddetto ordine "naturale" e sempre in modo che i naturali siano posizionati su una semiretta e gli interi su una retta.
Ric.: «Come rappresenteresti questi insiemi numerici ai tuoi allievi?».
C.: *«I relativi li metterei sulla retta dei numeri e i naturali invece devono stare sulla linea dei numeri».*
Ric.: «Che differenza c'è fra le due?».
C.: *«I relativi devono stare su una retta e i naturali su una semiretta».*
Ric.: «In che senso devono stare? Secondo te, gli interi devono stare per forza su una retta e i naturali su una semiretta?».
C.: «Sì».
Ric.: «Secondo te, è possibile ordinare i numeri interi in un modo diverso da questo: … -2, -1, 0, 1, 2, …?».
C.: «No, questi numeri devono essere messi sempre così».
Ric.: «Secondo te c'è un modo per ordinare tutti gli interi in modo che ci sia un primo elemento dal quale iniziare?».
C.: «No, non c'è un primo numero negativo».
Ric.: «È possibile secondo te ordinare gli interi così: 0, +1, -1, +2, -2, …?».
C.: «No, i negativi devono stare sempre prima dei positivi».
Ric.: «Le proponi queste cose in classe?».
C.: «Certo che lo dico che i numeri negativi devono stare sempre prima dei positivi».
Questa univoca disposizione secondo l'ordine "naturale" basata sul posizionare i naturali su una semiretta e gli interi su una retta, come è stato rilevato anche da Gagatsis e Panaoura (2000), può generare misconcezioni e ostacoli all'apprendimento, dato che, come sostengono i due autori, risulta essere una sola rappresentazione che non permette il coordinamento dei registri di rappresentazione semiotici necessari per la concettualizzazione (Duval, 1993); tra gli ostacoli che si possono generare da questo uso di un'unica rappresentazione vi può essere appunto

l'incomprensione delle corrispondenze biunivoche tra insiemi infiniti.

- 2 insegnanti dichiarano subito di esplicitare ai propri allievi affermazioni che rientrano nella misconcezione di *dipendenza* della cardinalità dalla "grandezza" di insiemi numerici:
A.: «Dico ai miei bambini che tutti i numeri: 0, 1, 2, 3, … sono il doppio dei pari perché mancano tutti i dispari. E poi dico che se aggiungiamo i negativi abbiamo ancora altri infiniti numeri in più rispetto a 0, 1, 2, …».
Questo fenomeno di dipendenza si basa nel ritenere sempre vera l'VIII nozione comune di Euclide: «*Il tutto è maggiore della parte*», sia per il finito che per l'infinito.

Queste affermazioni mettono in evidenza ancora una volta come le misconcezioni possedute dagli insegnanti su questo argomento, vengano trasferite in modo esplicito agli allievi durante l'azione didattica in classe.

5.2 Altri risultati ottenuti dallo scambio di opinioni

Dallo scambio di opinioni è inoltre emerso che gli insegnanti propongono ai propri allievi attività basate non solo sulle personali misconcezioni relative all'infinito matematico, ma anche su quelle che possiedono degli enti primitivi della geometria (Sbaragli, 2005).

Segmento come "collana di perle". 8 insegnanti affermano esplicitamente di fornire ai propri allievi il modello di *segmento concepito come "collana di perle"* (gli altri 12 insegnanti intervistati non entrano in questo argomento).
Da questo punto di vista, per esempio, l'insegnante *F.* afferma*: «Di solito faccio vedere come sono disposti i punti nel segmento, uno di fianco all'altro, piccoli, piccoli, vicini, vicini e dritti»* (disegna una "fitta" collana di perle).

A questa sollecitazione la ricercatrice domanda:
Ric.: «Secondo te, questo modo di rappresentare il segmento è corretto?».
F.: «Penso di sì, i punti devono essere allineati e vicini vicini l'uno all'altro».
Ric.: «Questo lo mostri in classe ai tuoi allievi?».
F.: «Sì, questo lo faccio sempre vedere».
Questo modello intuitivo erroneo di segmento come "collana di perle" posseduto anche da allievi di scuola superiore (Arrigo, D'Amore, 1999,

2002), e rafforzato dall'insegnamento ricevuto, rappresenta un ostacolo verso la comprensione del concetto di infinito matematico, della topologia della retta, della densità e continuità non solo in campo geometrico.

Dipendenza. Una misconcezione riscontrata in tutti gli insegnanti intervistati in Sbaragli (2006) legata a quella di segmento concepito come "collana di perle" è la *dipendenza* dei cardinali transfiniti da fatti relativi a misure (l'insieme di misura maggiore, ha più elementi). Questo aspetto della dipendenza, come abbiamo messo in evidenza nel paragrafo 1, si basa sulla convinzione che vi siano più punti in una retta piuttosto che in un segmento, ossia che a maggior lunghezza debba corrispondere una maggiore cardinalità dell'insieme di punti (Fischbein, 1992, 2001); i punti, dunque, non sono concepiti dagli insegnanti come enti astratti, ma come oggetti aventi una certa dimensione (Sbaragli, 2005).
In quest'ottica, 8 insegnanti affermano di dire esplicitamente ai propri allievi che vi sono più punti in un segmento più lungo piuttosto che in uno più corto, manifestando così di proporre situazioni ai propri allievi basate sulla misconcezione di *dipendenza* dei cardinali transfiniti da fatti relativi a misure: *N.:«Dico che in un segmento più lungo ci sono più punti, dato che è appunto più lungo»*. Di questi 8 insegnanti, 5 sono gli stessi che evidenziano la misconcezione di segmento come "collana di perle".
Ancora una volta, la presenza di un ostacolo epistemologico, messo in evidenza dalla Storia della matematica (la misconcezione di dipendenza, nonostante varie ma sporadiche ricadute, è stata definitivamente debellata nel mondo scientifico solo nel XIX secolo) mostra come sia impossibile dominare tale questione senza uno studio specifico.

6. Risposte alle domande formulate in 3

Siamo ora in grado di rispondere alle domande di ricerca formulate in 3.

R1. La risposta risulta affermativa. Gli insegnanti propongono situazioni, realizzano attività e fanno affermazioni relative all'infinito matematico fin dai primi anni di scuola primaria. Tali proposte rientrano sia in àmbito aritmetico (legati principalmente all'idea di numero) che geometrico (legati soprattutto al concetto di retta), oltre che all'idea di infinito in sé.

R2. Le proposte degli insegnanti di scuola primaria relative all'infinito matematico sono spesso erronee in matematica e si basano sulle misconcezioni possedute dagli insegnanti stessi. In àmbito aritmetico si riscontrano principalmente le misconcezioni di infinito come numero finito grande o come indeterminato, mentre in àmbito geometrico è presente la misconcezione di infinito considerato come sinonimo di illimitato e l'idea di segmento concepito come collana di perle. In entrambi i contesti è inoltre presente la misconcezione di dipendenza.

R3. Gli insegnanti di scuola primaria non sono consapevoli di trasferire ai propri allievi misconcezioni che necessiteranno di sistemazione cognitiva; sono infatti convinti che le proposte didattiche che presentano ai propri allievi, rientrano tra quelle corrette in matematica. Tali erronee proposte fornite inconsapevolmente dagli insegnanti, non fanno altro che creare immagini intuitive scorrette nella mente degli allievi. Queste misconcezioni permangono così nella mente degli studenti e si rafforzano, tanto da costituire un ostacolo difficile da superare al momento in cui l'infinito viene trattato alle superiori.

7. Conclusioni

In questa ricerca si sono mostrate le affermazioni, situazioni e attività che vengono proposte dagli insegnanti di scuola primaria ai propri allievi sull'infinito matematico e che si fondano sulle misconcezioni da essi posseduti. Si è così dimostrato che le intuizioni degli insegnanti distanti dal "sapere istituzionale" atteso dalla Matematica vengono trasferite ai propri allievi durante l'azione in classe, rafforzando così le loro intuizioni. Ossia, in questa ricerca si è messo in evidenza che la trasposizione didattica dal "Sapere" al "sapere da insegnare" effettuata da insegnanti di scuola primaria, si fonda, per questo argomento, su un "Sapere" scorretto in ambito matematico, dato che gli insegnanti non hanno avuto in precedenza formazione su questo argomento; questo può comportare nocive ricadute nell'apprendimento degli allievi che emergono soprattutto nei livelli scolastici successivi.
Infatti, questo modo di concepire e di proporre l'infinito, può risultare di ostacolo per gli studenti nel momento in cui si troveranno ad avere a che fare alle superiori con lo studio dell'Analisi, dove l'infinito deve essere colto dal punto di vista attuale. Eppure, a quel punto, tale nuova necessaria concezione potrebbe risultare di difficoltà insormontabile (Arrigo, D'Amore, 1999, 2002), dato che negli anni precedenti potrebbe essersi formato un modello intuitivo di infinito ben radicato e inteso solo in senso potenziale, legato solamente alle ingenue intuizioni degli allievi e a quelle dei loro insegnanti, che risultano essere entrambe lontane dal mondo della matematica.
Questo ci pare una ulteriore conferma del fatto che le difficoltà rilevate nella comprensione dell'infinito matematico non sono dunque dovute

solamente ad ostacoli epistemologici, ma soprattutto da ostacoli didattici creati dalle idee erronee degli insegnanti. Come avevamo già rilevato in Sbaragli (2004), è anche molto probabile che le lacune su questo tema non siano un problema esclusivo della scuola primaria, ma che siano invece diffuse ad ogni livello scolastico tra tutti quegli insegnanti a cui non è stata data l'occasione di riflettere correttamente sull'infinito matematico.

Ribadiamo quindi ancora una volta come questo tema è risultato fino ad ora troppo sottovalutato, soprattutto come argomento di formazione degli insegnanti, ed è proprio da questa mancanza che derivano in parte le difficoltà degli studenti di scuola superiore che portano con sé convinzioni antecedenti non idonee ad affrontare le nuove situazioni cognitive.

Bisogna quindi tentare di evitare e superare i modelli scorretti posseduti dagli insegnanti, e di conseguenza degli allievi, proponendo corsi di formazione per insegnanti sull'infinito matematico che tengano conto dell'aspetto storico legato a questo argomento e ai risultati rilevati dai ricercatori in didattica della matematica.

Questa formazione farà sì che gli insegnanti in futuro non siano più la fonte di ostacoli didattici che impediscono l'apprendimento corretto del concetto di infinito matematico.

Bibliografia

Arrigo G., D'Amore B. (1999). "Lo vedo ma non ci credo...". Ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di un teorema di Georg Cantor che coinvolge l'infinito attuale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* 22B, 5, 465-494.

Arrigo G., D'Amore B. (2002). "Lo vedo ma non ci credo...", seconda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor. *La matematica e la sua didattica.* 1, 4-57.

Bagni G.T. (1998). L'infinitesimo attuale e potenziale nelle concezioni degli studenti prima e dopo lo studio dell'Analisi. *L'educazione matematica*. XIX, V, 3, 2, 110-121.

Bagni G. T. (2001). Infinito e infinitesimo potenziale e attuale: una sfida per la Scuola Secondaria Superiore. *Bollettino dei docenti di matematica*. Maggio. 42, 9-20.

D'Amore B., Sbaragli S. (2005). Analisi semantica e didattica dell'idea di "misconcezione". *La matematica e la sua didattica*. 2. 139-163.

Duval R. (1993). Registres de Répresentations sémiotiques et Fonctionnement cognitif de la Pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives.* 5, 37-65.

Fischbein E. (1992). Modelli taciti e ragionamento matematico. In: Fischbein E., Vergnaud G. *Matematica e scuola: teorice ed esperienze.* Bologna: Pitagora. 25-38.

Fischbein E. (2001). Tacit models and infinity. *Educational Studies in*

Mathematics. Infinity–The Never-ending Struggle. Guest Editors: D. Tall, D. Tirosh. 48, 2-3. 309-329.
Fischbein E., Tirosh D., Hess P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics.* 10, 3-40.
Gagatsis A., Panaoura G. (2000). Rappresentazioni semiotiche e apprendimento. Un esempio: la retta aritmetica. *Bollettino dei docenti di matematica*. 41, 25-58.
Garbin S. (2005). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos; las rapresentaciones y los lenguajes matemàticos. *Relime.* 8 (2), 169-193.
Gimenez J. (1990). About intuitional knowledge of density in Elementary School. *Atti del XIV PME.* Mexico. 19-26.
Marchini C. (2001). *Il problema ed il ruolo dell'infinito*. Appunti delle lezioni per la Scuola di Specializzazione.
Moreno L.E., Waldegg G. (1991). The conceptual evolution of actual mathematical infinity. *Educational Studies in Mathematics*. 22, 211-231.
Nuñez Errázuriz R. (1991). A 3-dimension conceptual space of transformations for the study of the intuition of infinity in plane geometry. *Proceedings of the 15th International Conference Psychology of Mathematics Education.* III, Assisi, 109-116.
Sbaragli S. (2004). Le convinzioni degli insegnanti sull'infinito matematico. *Tesi di Dottorato di ricerca.* Università Komenského di Bratislava, direttore Ivan Treskansky, advisor Bruno D'Amore. Versione in italiano e in inglese nel sito: http://math.unipa.it/~grim/tesi_it.htm.
Sbaragli S. (2005). L'importanza delle diverse rappresentazioni semiotiche. Il caso degli enti primitivi della geometria. *Bollettino dei Docenti di Matematica.* Bellinzona (Svizzera). 50. 69-76.
Sbaragli S. (2006). Primary School Teachers' beliefs and change of beliefs on Mathematical Infinity. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education.* 5, 2, 49-76.
Shama G., Movshovitz Hadar N. (1994). Is infinity a wholer number? *Proceedings of the XVIII PME*. Lisboa. 2, 265-272.
Tall D. (1980). The notion of infinity measuring number and its relevance in the intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*. 11, 271-284.
Tall D., Tirosh D. (Guest Editor) (2001). *Educational Studies in Mathematics.* Infinity – The Never-ending Struggle. 48, 2-3. 129-329.
Tsamir P. (2000). La comprensione dell'infinito attuale nei futuri insegnanti. *La matematica e la sua didattica.* 2, 167-207.
Tsamir P., Tirosh D. (1992). Students' awareness of inconsistent ideas about actual infinity. *Proceedings of the XVI PME*. Durham NH. 90-97.
Tsamir P. (1999). The transition from comparison of finite to the comparison of infinite sets: Teaching prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics.* 38, 209-234.
Tsamir P., Tirosh D. (1997). Metacognizione e coerenza: il caso dell'infinito. *La matematica e la sua didattica*. 2, 122-131.

Tsamir P., Tirosh D. (1999). Consistency and representations: The case of actual infinity. *Journal for Research in Mathematics Education.* 30, 213-219.

Waldegg G. (1993). La comparaison des ensembles infinis: un cas de résistance à l'instruction. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives.* 5, 19-36.